# CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

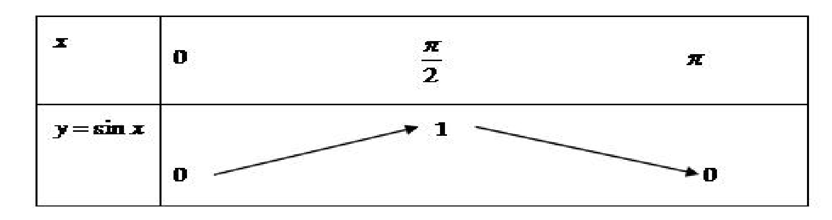
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

**1. Hàm số** $y=\sin x$

- Có tập xác định $D=\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$, $\sin\left(x+k2\pi\right)=\sin x$;
- Do hàm số $y=\sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$ nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài $2\pi$, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$.

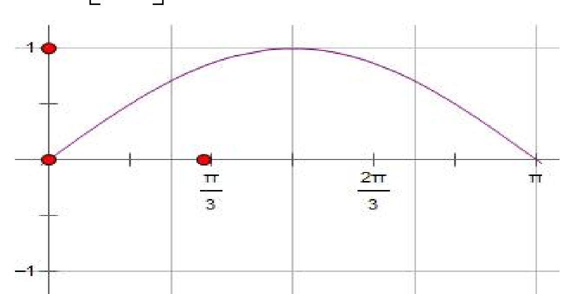
Khi vẽ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$

Bảng biến thiên:

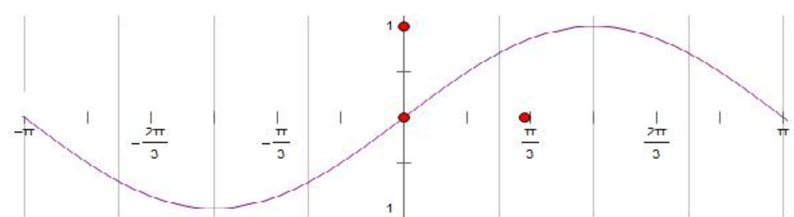


| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ | $0$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ |

Đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$

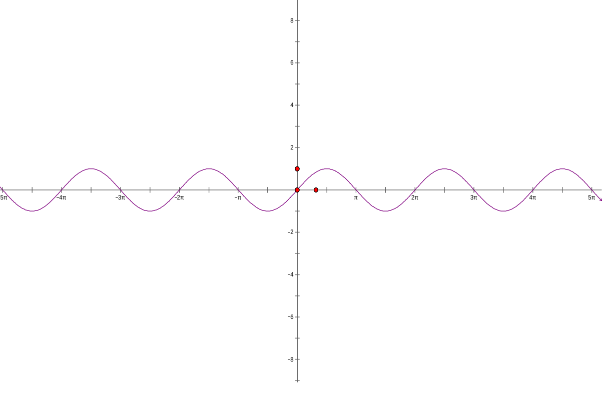



Lấy đối xứng phần đồ thị này qua gốc tọa độ lập thành đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$




Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\sin x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin.*

Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.



Từ đó do tính tuần hoàn với chu kì $2\pi$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$

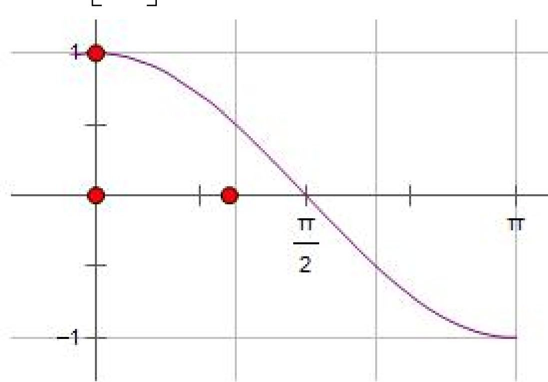
**2. Hàm số** $y = \cos x$

- Có tập xác định $D = \mathbb{R}$;
- Là hàm số chẵn;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$;
- Do hàm số $y = \cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$ nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài $2\pi$, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\pi; \pi\right]$.

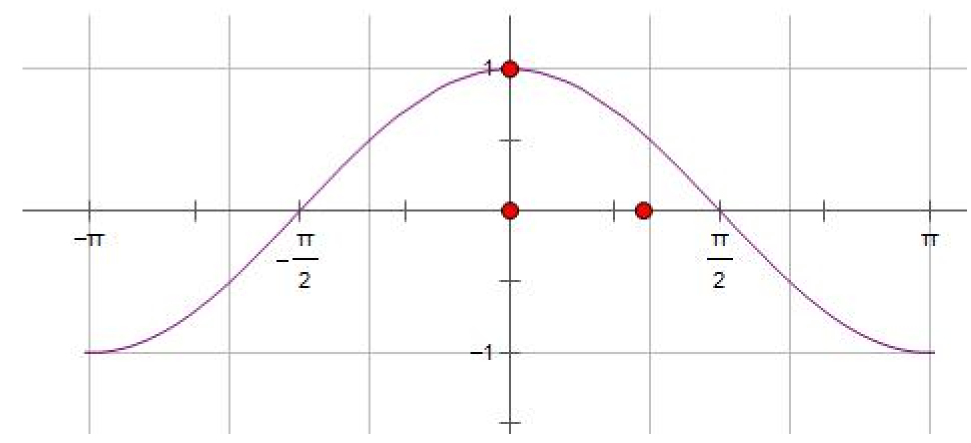
Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\pi; \pi\right]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị của nó nhận trục $Oy$ làm trục đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[0; \pi\right]$

Bảng biến thiên:

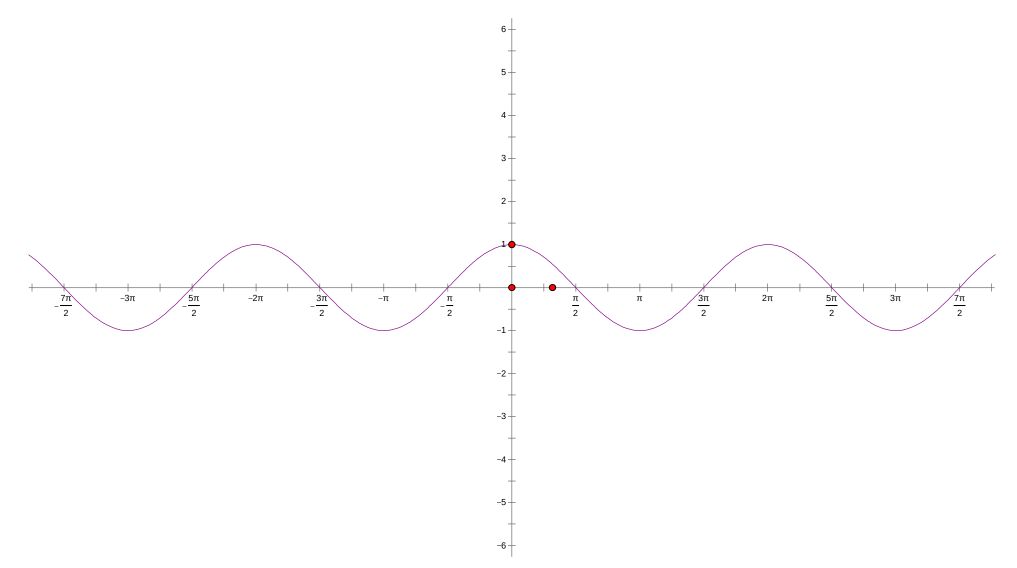
Đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[0; \pi\right]$




Lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục $Oy$ lập thành đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\pi; \pi\right]$




Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi, ...$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \cos x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin*



Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\pi;0\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(0;\pi\right)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kì $2\pi$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\pi+k2\pi;\,k2\pi\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(k2\pi;\,\pi+k2\pi\right)$.

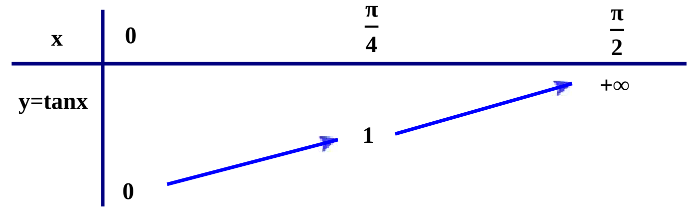
**3. Hàm số** $y=\tan x$

- Có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$;
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\pi$, $\tan\left(x+k\pi\right)=\tan x$;

Do hàm số $y=\tan x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $\pi$ nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài $\pi$, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

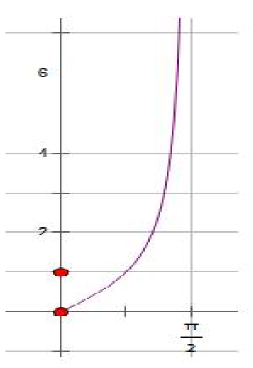
Khi vẽ đồ thị của hàm số $y=\tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ta nên để ý rằng : Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

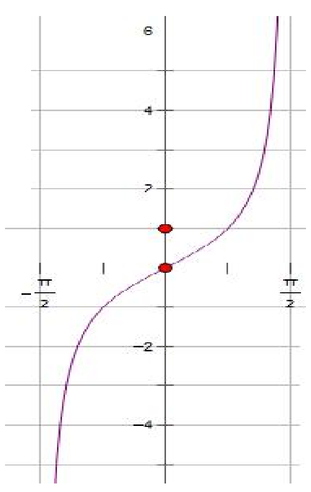


| x | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| y=tanx | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $+\infty$ |

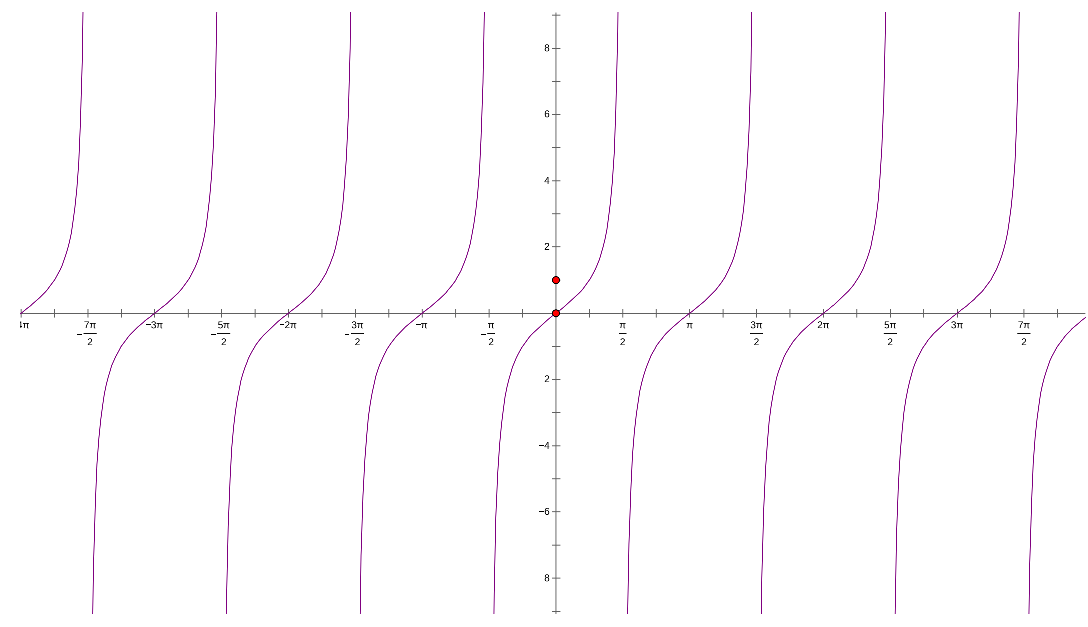
Đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$




Lấy đối xứng phần đồ thị này qua gốc tọa độ lập thành đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$




Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \tan x$.




Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ $\pi$ nên hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

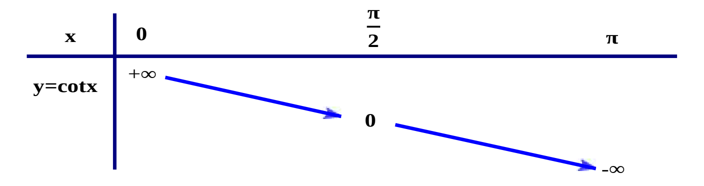
Đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm một đường tiệm cận (đứng).

**4. Hàm số** $y = \cot x$

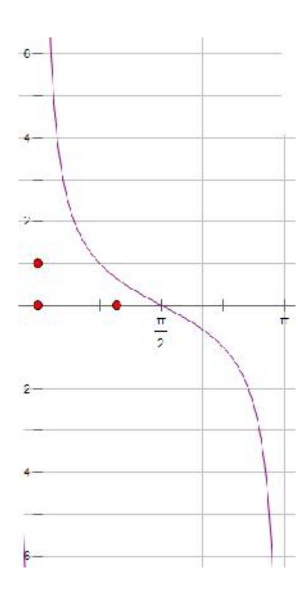
- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ;
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ ®, $\cot(x + k®) = \cot x$;

Do hàm số $y = \cot x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ ® nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên đoạn có độ dài ®, chẳng hạn trên đoạn $[0; ®]$.

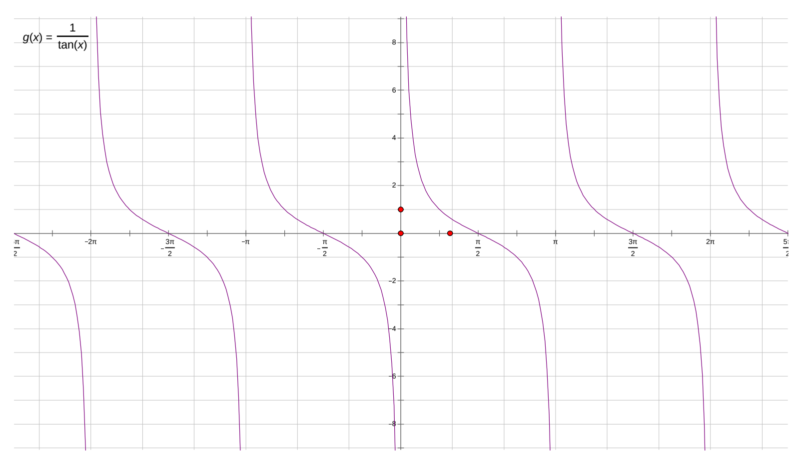
Bảng biến thiên:




Đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên $[0;®]$



Tịnh tiến phần đồ thị sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $\pi, 2\pi, 3\pi, ...$ thì ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \cot x$.



Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên khoảng $(0;\,®)$. Từ đó do tính tuần hoàn với chu kỳ ® nên hàm số $y=\cot x$ đồng biến trên khoảng $(k®;\,®+k®)$.

Đồ thị hàm số $y=\cot x$ nhận mỗi đường thẳng $x=k®$ làm một đường tiệm cận (đứng).

**B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

**Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số**

**Phương pháp:** Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y=\sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ge 0$.
- $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x)\ne 0$.
- $y=\dfrac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x)>0$.
- Hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
  $-1\le\sin x\le 1$ ; $-1\le\cos x\le 1$.
  Như vậy, $y=\sin\left[u(x)\right], y=\cos\left[u(x)\right]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.
- $y=\tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $y=\cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ne k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

**I. Các ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\sin\left(\dfrac{5x}{x^2-1}\right)$; b) $y=\cos\sqrt{4-x^2}$; c) $y=\sqrt{\sin x}$; d) $y=\sqrt{2-\sin x}$.

**Giải**

a) Hàm số $y=\sin\left(\dfrac{5x}{x^2-1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne\pm 1.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y=\cos\sqrt{x^2-4}$ xác định $\Leftrightarrow$ $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2.$

Vậy $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\le x\le 2\}$.

c) Hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x\ge 0\Leftrightarrow k2\pi\le x\le\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,k2\pi\le x\le\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

d) Ta có: $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow 2-\sin x>0$ .

Do đó, hàm só luôn luôn xác định hay $D=\mathbb{R}$.

**Ví dụ 2.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; b) $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; c) $y=\dfrac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$; d) $y=\dfrac{1}{\tan x-1}$.

**Giải**

a) Hàm số $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y=\frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos(x-\pi)\neq 0 \Leftrightarrow x-\pi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y=\frac{1}{\tan x-1}$ xác định $\begin{cases}\tan x\neq 1\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$

**Ví dụ 3.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\cos 2x+\frac{1}{\cos x}$; b) $y=\frac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$.

**Giải**

a) Hàm số $y=\cos 2x+\frac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\frac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$\sin 3x\cos 3x\neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 6x\neq 0 \Leftrightarrow 6x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Ví dụ 4.** Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y=\sqrt{2m-3\cos x}$.

**Giải**

Hàm số đã cho xác định trên R khi và chỉ khi $2m-3\cos x\geq 0 \Leftrightarrow \cos x\leq\frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi $x$ khi $1\leq\frac{2m}{3} \Leftrightarrow m\geq\frac{3}{2}$.

**II. Bài tập rèn luyện**

**BT 1.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;  b) $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{1+\cos x}}$.

**Giải**

a) Nhận thấy $0\le\cos^2 x\le 1$ nên $1-\cos^2 x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{1+\cos x}}$ xác định $\Leftrightarrow 1+\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**BT 2.** Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;  b) $y=\tan 6x+\dfrac{1}{\cot 3x}$;

c) $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin x+1}+\cot\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;  d) $y=\dfrac{\tan 5x}{\sin 4x-\cos 3x}$.

**Giải**

a) Hàm số $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow 3x-\dfrac{\pi}{3}\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\ne\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\tan 6x+\dfrac{1}{\cot 3x}$ xác định

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 6x\ne 0\\ \sin 3x\ne 0\\ \cot 3x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 6x\ne 0\\ \sin 6x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 12x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin x+1}+\cot\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin x\ne -1\\ \cos 2x\ne 0\\ \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x\ne\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x\ne -\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y=\dfrac{\tan 5x}{\sin 4x-\cos 3x}$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos 5x \neq 0\\ \sin 4x \neq \cos 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right) \neq \cos 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ \frac{\pi}{2}-4x \neq 3x+k2\pi\\ \frac{\pi}{2}-4x \neq -3x+k2\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ 7x \neq \frac{\pi}{2}-k2\pi\\ x \neq \frac{\pi}{2}-k2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ x \neq \frac{\pi}{14}-\frac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\\ x \neq \frac{\pi}{2}-k2\pi\end{cases}$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, \frac{\pi}{14}-\frac{k2\pi}{7}, \frac{\pi}{2}-k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**BT 3.** Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$ : $y=\frac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x-m\sin x+1}}$.

**Giải**

Hàm số xác định trên R khi và chỉ khi: $2\sin^2 x-m\sin x+1>0$ với mọi $t \in [-1;1]$

Ta có: $a=m^2-8$

- TH 1: $\Delta<0 \Leftrightarrow m^2-8<0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ . Khi đó $f(t)>0, \forall t$ (thỏa mãn)
- TH 2: $\Delta=0 \Leftrightarrow m^2-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\sqrt{2}\\ m=2\sqrt{2}\end{array}\right.$
  - o Với $m=-2\sqrt{2}$ thì $f(t)=2t^2-2\sqrt{2}t+1=\left(\sqrt{2}t-1\right)^2$

    Ta thấy $f(t)=0$ tại $t=\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;1]$ (không thỏa mãn)
  - o Với $m=2\sqrt{2}$ thì $f(t)=2t^2+2\sqrt{2}t+1=\left(\sqrt{2}t+1\right)^2$

    Ta thấy $f(t)=0$ tại $t=-\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;1]$ (không thỏa mãn)
- TH 3: $\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-8>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-2\sqrt{2}\\ m>2\sqrt{2}\end{array}\right.$ khi đó tam thức $f(t)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2$ (giả sử $t_1<t_2$ )

  Ta có bảng xét dấu:

| t | -∞ | | $t_1$ | | $t_2$ | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | | + | 0 | - | 0 | + | |

Từ bảng xét dấu ta thấy:

$f(t)=2t^2-mt+1>0, \forall t \in [-1,1] \Leftrightarrow t_1>1$ hoặc $t_2<1$

Với $t_1 > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m-\sqrt{m^2-8}}{4} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-8} < m-4 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 3 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

Với $t_2 < -11 \Leftrightarrow \dfrac{m+\sqrt{m^2-8}}{4} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-8} < -m-4 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > -3 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

Vậy giá trị m cần tìm là $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

**Dạng 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số**

**Phương pháp:** Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- **Bước 1:** Tìm tập xác định $D$ của hàm số; kiểm chứng $D$ là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- **Bước 2:** Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$

  - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên $D$ (2)
  - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên $D$ (3)

**Chú ý:**

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên $D$.

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho $\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$

**I. Các ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = sin2x; b) y = $\tan|x|$; c) $y = \sin^4 x$.

**Giải**

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**Ví dụ 2.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) y = tanx + cotx; b) y = sinx.cosx.

**Giải**

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-(\tan x+\cot x)=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$ . Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\sin(-x).\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

**Ví dụ 3.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=2\sin x+3$; b) $y=\sin x+\cos x$ .

**Giải**

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)+3=1\ ;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=5$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

**Ví dụ 4.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$; b) $y=\frac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}$.

**Giải**

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Chọn $x=\frac{\pi}{4}\in D\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\in D$

Ta có: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{x}{2}$

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f\left(-x\right)=\dfrac{\cos^3\left(-x\right)+1}{\sin^3\left(-x\right)}=\dfrac{\cos^3 x+1}{-\sin^3 x}=-\dfrac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}=-f\left(x\right)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

**Ví dụ 5.** Xác định tham số m để hàm số sau: $y=f\left(x\right)=3m\sin 4x+\cos 2x$ là hàm số chẵn.

**Giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$f\left(-x\right)=3m\sin\left(-4x\right)+\cos\left(-2x\right)=-3m\sin 4x+\cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$f\left(-x\right)=f\left(x\right),\forall x\in D\Leftrightarrow 3m\sin 4x+\cos 2x=-3m\sin 4x+\cos 2x,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow 6m\sin 4x=0\Leftrightarrow m=0$

**II. Bài tập rèn luyện**

**BT 1.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=4x^2+\cos 5x$ ; b) $y=x^2\sin x+\cot x$ .

**Giải**

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f\left(-x\right)=4\left(-x\right)^2+\cos\left(-5x\right)=4x^2+\cos 5x=f\left(x\right)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$f\left(-x\right)=\left(-x\right)^2\sin\left(-x\right)+\cot\left(-x\right)=-x^2\sin x-\cot x=-\left(x^2\sin x+\cot x\right)=-f\left(x\right)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**BT 2.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ ; b) $y=\sin\sqrt{1-x}$ .

**Giải**

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{3\right\}$.

Ta có: $x=-3\in D$ nhưng $-x=3\notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D=\left[1;+\infty\right)$

Ta có: $x=3\in D$ nhưng $-x=-3\notin D$ nên D không có tính đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

**BT 3.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y=\sin x+\cos x$ ; b) $y=\dfrac{\tan 3x+\cot 5x}{\sin 3x}$.

**Giải**

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{3\right\}$.

Ta có:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+5=2;$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+5=8$

Nhận thấy: $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Do đó, hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có:

$f(-x)=\frac{\tan(-3x)+\cot(-5x)}{\sin(-3x)}=\frac{\tan(3x)+\cot(5x)}{\sin(3x)}=f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**BT 4.** Tìm tham số $a,b$ để hàm số:

$$y=f(x)=\begin{cases}(3a-1)\sin x+b\cos x, \text{ khi } x<0\\ a\sin x+(3-2b)\cos x, \text{ khi } x\geq 0\end{cases}$$ là hàm số lẻ.

**Giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

- TH 1: Với $x<0$ thì $f(x)=(3a-1)\sin x+b\cos x$

  Và $f(-x)=a\sin(-x)+(3-2b)\cos(-x)=-a\sin x+(3-2b)\cos x$

  Vì hàm số lẻ nên $f(-x)=-f(x)$ hay

  $-a\sin x+(3-2b)\cos x=-(3a-1)\sin x-b\cos x,\forall x<0$

  $\Leftrightarrow(2a-1)\sin x+(3-b)\cos x=0,\forall x<0$

  Đẳng thức trên đúng với mọi $x<0$ khi $\begin{cases}2a-1=0\\3-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=3\end{cases}.$

- TH 2: Với $x>0$ thì $f(x)=a\sin x+(3-2b)\cos x$

  Và $f(-x)=(3a-1)\sin(-x)+b\cos(-x)=-(3a-1)\sin x+b\cos x$

  Vì hàm số lẻ nên $f(-x)=-f(x)$ hay

  $-(3a-1)\sin x+b\cos x=-a\sin x-(3-2b)\cos x$

  Đẳng thức trên đúng với mọi $x>0$ khi $\begin{cases}2a-1=0\\3-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=3\end{cases}.$

  Vậy hàm số đã cho lẻ khi $a=\frac{1}{2},b=3.$

**Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác**

**Phương pháp:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $D$

- $M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$
- $m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$

**Lưu ý:**

- $-1 \le \sin x \le 1; \ -1 \le \cos x \le 1.$
- $0 \le \sin^2 x \le 1; \ 0 \le \cos^2 x \le 1.$
- $0 \le \sqrt{\sin x} \le 1; \ 0 \le \sqrt{\cos x} \le 1.$

**I. Các ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ ; b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$.

**Giải**

a) Ta có:

$$-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 2 \Rightarrow -1 \le 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \le 3$$

Hay $-1 \le y \le 3$ . Suy ra:

$\text{Max}y = 3$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{Min}y = -1$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) Ta có:

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos x + 1 \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{\cos x + 1} \le \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 0 \le 2\sqrt{\cos x + 1} \le 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \le 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \le 2\sqrt{2} - 3$$

Hay $-3 \le y \le 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{Min}y = -3$ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Ví dụ 2.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x + \cos x$ ; b) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$.

**Giải**

a) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$ .

Suy ra:

$\text{Max}y = \sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{Min}y = -\sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) Ta có: $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

Suy ra: $-2\le y\le 2$ . Do đó:

$\text{Max}y=2$ khi $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

$\text{Min}y=-2$ khi $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

**Ví dụ 3.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y=\cos^2 x+2\sin x+2$; b) $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1$.

**Giải**

a) Ta có:

$y=\cos^2 x+2\sin x+2=\left(1-\sin^2 x\right)^2+2\sin x+2$

$=-\sin^2 x+2\sin x+3=-\left(\sin x-1\right)^2+4$

Vì $-1\le \sin x\le 1\Rightarrow -2\le \sin x-1\le 0\Rightarrow 4\ge\left(\sin x-1\right)^2\ge 0$

$\Rightarrow -4\le -\left(\sin x-1\right)^2\le 0\Rightarrow 0\le -\left(\sin x-1\right)^2+4\le 4$

Hay $0\le y\le 4$

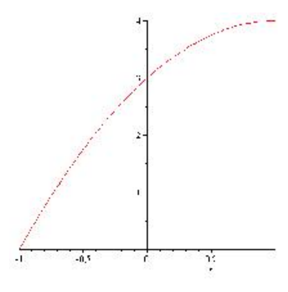
Do đó:

$\text{Max}y=4$ khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

$\text{Min}y=0$ khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

**Lưu ý:**

Nếu đặt $t=\sin x,t\in\left[-1;1\right]$ . Ta có (P): $y=f\left(t\right)=-t^2+2t+3$ xác định với mọi $t\in\left[-1;1\right]$, (P) có hoành độ đỉnh $t=1$ và trên đoạn $\left[-1;1\right]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=-1$ hay $\sin x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t=1$ hay $\sin x=1$.



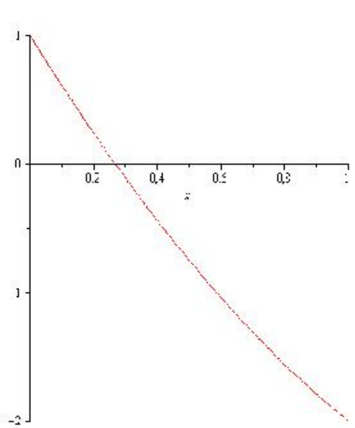
b) Ta có

$y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1=\left(1-\cos^2 x\right)^2-2\cos^2 x+1$

$=\cos^4 x-4\cos^2 x+2=\left(\cos^2 x-2\right)^2-2$

Vì $0\le\cos^2 x\le 1\Leftrightarrow -2\le\cos^2 x-2\le -1\Leftrightarrow 4\ge\left(\cos^2 x-2\right)^2\ge 1$

$\Leftrightarrow 2\ge\left(\cos^2 x-2\right)^2-2\ge -1\Leftrightarrow 2\ge y\ge -1$



Do đó:

$\text{Max}y=2$ khi

$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Min}y = -1$ khi

$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Lưu ý:**

Nếu đặt $t = \cos^2 x, t \in [0;1]$. Ta có (P): $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$ xác định với mọi $t \in [0;1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 2 \in [0;1]$ và trên đoạn $[0;1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$.

**II. Bài tập rèn luyện**

**BT 1.** Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a) $y = 3\sqrt{\sin x} + 2$; b) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$.

**Bài 2.** Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a) $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = 3 - 2\cos^2 3x$; c) $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$ ; d) $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$.

**Bài 3.** Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a) $y = 6\cos^2 x + \cos^2 2x$; b) $y = 3\sin x + 4\cos x - 1$

c) $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$; c) $y = (4\sin x - 3\cos x)^2 - 4(4\sin x - 3\cos x) + 1$

**Bài 4.** Cho hai số $x, y$ thỏa mãn $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm GTLN và GTNN (nếu có) của biểu thức

$P = x + 2y + 1$

**Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó {Tham khảo}**

**Phương pháp**

**Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn *f(x)* tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:**

- Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định là $D$
- Với mọi $x \in D$, ta có $x - T_0 \in D$ và $x + T_0 \in D$ (1). Chỉ ra $f(x + T_0) = f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn

**Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ $T_0$**

Tiếp tục, ta đi chứng minh $T_0$ là chu kỳ của hàm số tức chứng minh $T_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có $T$ sao cho $0 < T < T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow ... \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $T_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $T_0$

*Một số nhận xét:*

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ $2\pi$. Từ đó $y = \sin(ax + b), y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ $\pi$. Từ đó $y = \tan(ax + b), y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

***Chú ý:***

$y = f_1(x)$ có chu kỳ $T_1$; $y = f_2(x)$ có chu kỳ $T_2$

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ $T_0$ là bội chung nhỏ nhất của $T_1$ và $T_2$.

**Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn**

Hàm số $y = f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- *Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn*
- *Tồn tại số* $a$ *sao cho hàm số không xác định với i* $x > a$ *hoặc* $x < a$
- *Phương trình* $f(x) = k$ *có vô số nghiệm hữu hạn*
- *Phương trình* $f(x) = k$ *có vô số nghiệm sắp thứ tự* $... < x_m < x_{m+1} < ...$ *mà* $|x_m - x_{m+1}| \to 0$ *hay* $\infty$

**I. Các ví dụ mẫu**

**Bài 1.** Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $T_0$

a) $f(x) = \sin x$, $T_0 = 2\pi$; b) $f(x) = \tan 2x$, $T_0 = \frac{\pi}{2}$

**Hướng dẫn:**

a) Ta có : $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử có số thực dương $T < 2\pi$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(x + T) = \sin x$ $, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Cho $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow VT(*) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T < 1;$ $VP(*) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (*)$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$

b) Ta có : $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x), \forall x \in D$.

Giả sử có số thực dương $T < \frac{\pi}{2}$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x + 2T) = \tan 2x$ $, \forall x \in D$ (**)

Cho $x = 0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0;$ $VP(**) = 0$

B $\Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{2}$

**II. Bài tập rèn luyện**

**BT 1.** Tìm chu kỳ của hàm số:

a/ $y = \sin 2x$ b/ $y = \cos\frac{x}{3}$ c/ $y = \sin^2 x$

d/ $y = \sin 2x + \cos\frac{x}{2}$ e/ $y = \tan x + \cot 3x$ f/ $y = \cos\frac{3x}{5} - \sin\frac{2x}{7}$

g/ $y = 2\sin x.\cos 3x$ h/ $y = \cos^2 4x$ i/ $y = \tan(-3x + 1)$

**BT 2.** Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$; b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; c) $f(x) = \sin(x^2)$; d) $y = \tan\sqrt{x}$.

**Hướng dẫn**

**c)** Hàm số $f(x)=\sin\left(x^2\right)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}\to 0 \text{ khi } k\to\infty$$

**d)** Hàm số $f(x)=\tan\sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$(k+1)^2\pi^2-k^2\pi\to\infty \text{ khi } k\to\infty$$

**BT 3.** Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là $T_1, T_2$. Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x)\pm g(x)$; $f(x).g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x)\neq 0\right)$ là những hàm số tuần hoàn.

**Dạng 5. Vẽ đồ thị hàm số lượng giác**

**Phương pháp**

**1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:**

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ $T_0$ của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ $T_0$ có thể chọn:

  $x\in\left[0, T_0\right]$ hoặc $x\in\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$.
- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

**2/ Một số phép biến đổi đồ thị:**

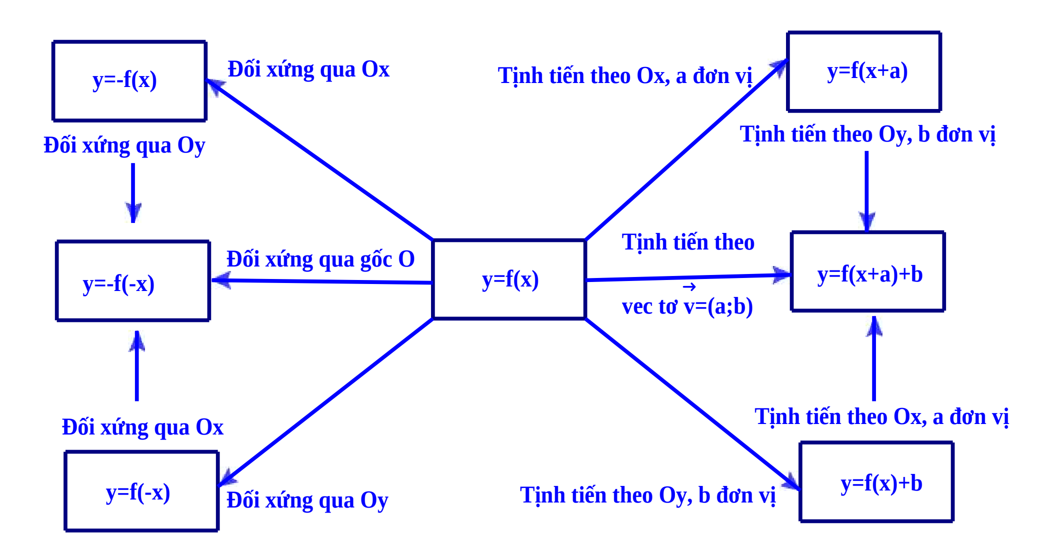
a) Từ đồ thị hàm số y = f(x), suy ra đồ thị hàm số y = f(x) + a bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) lên trên trục hoành a đơn vị nếu a > 0 và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu a < 0.

b) Từ đồ thị hàm số y = f(x), suy ra đồ thị hàm số $y=f(x+a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) sang phải trục hoành a đơn vị nếu a > 0 và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu a < 0.

c) Từ đồ thị y = f(x), suy ra đồ thị y = –f(x) bằng cách lấy đối xứng đồ thị y = f(x) qua trục hoành.

d) Đồ thị $y=\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x), & \text{neu } f(x)\geq 0 \\ -f(x), & \text{neu } f(x)<0\end{cases}$ ñöôïc suy töø ñoà thò y = f(x) baèng caùch giöõ nguyeân phaàn ñoà thò y = f(x) ôû phía treân truïc hoaønh vaø laáy ñoái xöùng phaàn ñoà thò y = f(x) naèm ôû phía döôùi truïc hoaønh qua truïc hoaønh.

**Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số**




**Ví dụ 1.** Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y=\tan x$

a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị bằng 1

c) Nhận giá trị dương; d) Nhận giá trị âm.

**Ví dụ 2.** Dựa vào đồ thị $y=\sin x$, hãy vẽ đồ thị hàm số $y=|\sin x|$

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng $\sin 2(x+k\pi)=\sin 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y=\sin 2x$.

**Ví dụ 4.** Vẽ đồ thị hàm số $y=\cos x$, tìm các giá trị của x để $\cos x=\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 5.** Dựa vào đồ thị hàm số $y=\sin x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số nhận giá trị âm

**Ví dụ 6.** Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số nhận giá trị dương.